

TD 31 : Matrices et applications linéaires **Indications**

Matrices de vecteurs et d'applications

1 ★ Soit $\mathcal{B} = ((1, 2, -2), (-4, 1, 3), (0, 5, -3))$ une base de \mathbb{R}^3 . Déterminer la matrice du vecteur $x = (8, 3, -3) \in \mathbb{R}^3$ dans la base \mathcal{B} .

2 ★ (De morphisme à matrice) Déterminer les matrices dans les bases canoniques des morphismes suivants :

1) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ définie par

$$f(x, y, z) = (-x + 2z, 3x - 4y, -5x + 6z, -7y + 8z)$$

2) $f : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$ définie par

$$f(P) = 2P - XP'$$

3) $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = AM$, où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

4) $f : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$ définie par

$$f(P) = Q(X+2) - Q(X)$$

avec Q un polynôme tel que $Q' = P$.

4 Pour calculer par exemple $f(X^2)$, il suffit de trouver le polynôme Q qui vérifie $Q' = X^2$. C'est assez simple. Noter que Q n'est pas nécessairement dans $\mathbb{R}_2[X]$, mais $Q(X+2) - Q(X)$ l'est.

3 ★★ (De matrice à morphisme) On pose :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Déterminer les expressions des morphismes f et g canoniquement associés à A et B . Déterminer, lorsque cela a un sens, les matrices dans les bases canoniques de $f + 2g$, de $f \circ g$, de $g \circ f$, de f^{-1} , de g^{-1} , de $(f \circ g)^{-1}$ et de $(g \circ f)^{-1}$.

4 ★★ Soit $f : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$ définie par

$$f(P) = P(X+1) + P(X)$$

- Déterminer la matrice de f dans les bases canoniques (de départ et d'arrivée).
- Montrer que f est un isomorphisme, et déterminer la matrice associée à f^{-1} dans les bases canoniques.
- Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$. En déduire l'expression de $f^{-1}(aX^2 + bX + c)$.
- Avec la même méthode, déterminer l'expression des applications réciproques des morphismes suivants :

(a) $f : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$ définie par

$$f(P) = 2P - P' + 2P(1)$$

(b) $\Phi : E \rightarrow E$ définie par $\Phi(f) = f' - f$, avec $E = \text{Vect}(\mathbb{1}, \cos, \sin)$, où $\mathbb{1}$ désigne la fonction $x \mapsto 1$.

Suivre la méthode de l'exemple du cours.

5 ★★ (Endomorphismes nilpotents) On notera 0 l'application nulle de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $f^3 = 0$ et $f^2 \neq 0$, où l'on note $f^k := \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{k \text{ fois}}$.

- Justifier l'existence de $a \in \mathbb{R}^3$ tel que $f^2(a) \neq 0_E$.
- Démontrer que $\mathcal{B} = (a, f(a), f^2(a))$ est une base de \mathbb{R}^3 .
- Déterminer la matrice de f dans la base \mathcal{B} , qu'on notera A .
- Déterminer le commutant de A , i.e. l'ensemble des matrices M telles que $AM = MA$.
- Soit $F = \{g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3) \mid g \circ f = f \circ g\}$. Déduire de la question précédente que $F = \text{Vect}(\text{id}, f, f^2)$, où l'on note id l'application identité de \mathbb{R}^3 .

2 Écrire ce qu'il faut montrer avec des scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Puis, il faut réussir à isoler l'un d'eux pour montrer qu'il est nul. On sait notamment que $f^3 = 0 \dots$

4 On peut poser M une matrice quelconque de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et chercher ses coefficients en résolvant le système linéaire obtenu via $AM = MA$.

Changements de base(s)

6 ★ Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y) = (3x - y, -2x + 7y)$$

- 1) Écrire la matrice A canoniquement associée à f .
- 2) Soit $u = (1, -1)$ et $v = (2, 3)$. Montrer que (u, v) est une base de \mathbb{R}^2 .
- 3) Déterminer la matrice de f dans la base (u, v) .

7 ★★ Soit \mathcal{B}_c la base canonique de \mathbb{R}^3 et

$$\mathcal{B} = \left(\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \right)$$

- 1) Déterminer la matrice de passage P de \mathcal{B} vers \mathcal{B}_c et la matrice de passage Q de \mathcal{B}_c vers \mathcal{B} .
- 2) On note $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ défini par

$$f(x, y, z) = (2x + 2y + z, -2x - y, x + y - z)$$

Déterminer la matrice de f dans la base canonique, puis dans la base \mathcal{B} . En déduire $f \circ f \circ f$.

8 ★★ Soit $M = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}$, soit (e_1, e_2, e_3)

la base canonique de \mathbb{R}^3 et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'application dont la matrice dans la base (e_1, e_2, e_3) est M . Montrer que les vecteurs

$$e'_1 = 2e_1 + 3e_2 + e_3 \quad e'_2 = 3e_1 + 4e_2 + e_3$$

$$e'_3 = e_1 + 2e_2 + 2e_3$$

forment une base de \mathbb{R}^3 et calculer la matrice de f dans cette base.

9 ★★ Soit p le projecteur sur F parallèlement à G , avec

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}$$

$$G = \text{Vect}((1, 1, 1))$$

- 1) Déterminer une base \mathcal{B} adaptée à F et G .
- 2) Donner la matrice de p dans la base \mathcal{B} .
- 3) En déduire une expression de $p(x, y, z)$.

10 ★★ On pose $S = \begin{pmatrix} -5 & -6 & -6 \\ 6 & 7 & 6 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ et s l'endomorphisme canoniquement associé à S .

- 1) Montrer que s est une symétrie.
- 2) Déterminer ses éléments caractéristiques.
- 3) En déduire une base \mathcal{B} pour laquelle la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(s)$ est simple et donner cette matrice.

11 ★★★ Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ -2 & 6 & 6 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$

l'application linéaire canoniquement associée à A .

- 1) Pour un réel λ quelconque, calculer $\text{Ker}(A - \lambda I_3)$.
- 2) En déduire les valeurs λ pour lesquelles f n'est pas bijective.
- 3) Donner une base de $\text{Ker}(f - \lambda I_3)$ pour les valeurs de λ obtenues à la questions précédente.
- 4) En déduire une base dans laquelle la matrice de f est diagonale.

Noyau, image, rang, matrices équivalentes

12 ★★ Déterminer le rang, le noyau et l'image des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Montrer que $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K}) = \text{Ker} D \oplus \text{Im} D$.

13 ★★ Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et

$$M_{\alpha, \beta} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \alpha & \beta \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Déterminer les réels α et β telles que l'application linéaire canoniquement associée à $M_{\alpha, \beta}$ soit surjective.

14 ★★ Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de rang r . Montrer que A s'écrit comme la somme de r matrices de rang 1.

Commençons par un cas simple : si $A = J_r$, comment écrire J_r comme la somme de r matrices de rang 1 ? Puis dans le cas général, utiliser le fait que A est équivalente à la matrice J_r .

15 ★★★ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de rang $n - 1$. Montrer que A n'est pas inversible, puis que A est équivalente à une matrice nilpotente, i.e. à une matrice N pour laquelle il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que N^k soit la matrice nulle.

Pour la première question, passer par le morphisme canoniquement associé de A . Ensuite, on pourrait dire que A est équivalente à J_{n-1} sauf que J_{n-1} n'est pas nilpotente... Mais on connaît des matrices nilpotentes qui ressemblent à J_{n-1} , par exemple toute matrice triangulaire supérieure stricte est nilpotente. Il suffirait ensuite de montrer que l'une d'elles est équivalente à J_{n-1} .

Trace et matrices semblables

16 ★★ Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices semblables. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, A^k est semblable à B^k .

Partir de la définition de matrices semblables. C'est assez facile.

17 ★★ Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- 1) Montrer que si A et B sont semblables, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ les matrices $A - \lambda I_n$ et $B - \lambda I_n$ sont aussi semblables.
- 2) Est-ce que les matrices suivantes sont semblables ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Partir de la définition de matrices semblables.

18 ★★ En utilisant la trace, montrer qu'il n'existe pas deux matrices A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB - BA = I_n$.

19 ★★ Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $0_{n,n}$ la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- 1) On suppose que $\text{Tr}(AA^\top) = 0$. Montrer que $A = 0_{n,n}$.
- 2) On suppose que pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\text{Tr}(AM) = \text{Tr}(BM)$. Dédurre de la question précédente que $A = B$.

1) Utiliser la définition de la trace.

2) Remarquer que $\text{Tr}(AM) = \text{Tr}(BM)$ revient à écrire $\text{Tr}(AM) - \text{Tr}(BM) = 0 \dots$ et que montrer $A = B$ revient à montrer que $A - B = 0_{n,n}$